



**PROSEDING SEMINAR NASIONAL  
Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA**

30 Mei 2008, R. Sidang FMIPA UNY, Yogyakarta

ISBN : 978-979-99314-3-6

*Editor :*

**Dr. Hartono  
Dr. Heru Kuswanto  
Dr. Suyanta  
Dr. Heru Nurcahyo**

*Penyunting:*

***Dr. Endang Widjajanti LFX  
Agus Purwanto, M.Sc  
Nurhadi, S.Si  
Tri Atmanto, M.Si***

Artikel dalam prosiding ini telah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Hasil Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA pada 30 Mei 2008 di FMIPA-UNY



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA  
TAHUN 2008**



## DAFTAR ISI

Kata Pengantar	ii
Sambutan Ketua Panitia	iii
Sambutan Rektor	iv
Daftar Isi	v
<b>Makalah Utama</b>	
<b>Dr. Chairil Anwar</b> <i>Riset Biomasa Dalam Konteks EQ dan SQ</i>	U-1
<b>Makalah Sidang Paralel</b>	
<b>Bidang Fisika dan Pendidikan Fisika</b>	
<b>Mohammad Taufik</b> <i>Perhitungan Diameter Optimum dan Biaya Total untuk Pembangunan Jaringan Pipa Transmisi gas</i>	F-1
<b>Mohammad Taufik</b> <i>Analisa Kinerja Turbin Gas Di Stasiun Kompresor Gas (SKG) Bitung dan Cilamaya</i>	F-10
<b>Supardiyono</b> <i>Visualisasi Difraksi Celah Tunggal dan Interferensi Celah Ganda</i>	F-19
<b>Edi Istiyono</b> <i>Evaporasi Klasik Sebagai Metode Efektif untuk Pembuatan Lapisan Tipis Bahan Kontak Ohmik</i>	F-27
<b>Edi Istiyono</b> <i>Implantasi Ion sebagai Upaya Modifikasi Sifat Mekanik dan Elektrik Bahan</i>	F-41
<b>Erwan Sosiawan, Eddy Yahya, Sri Yani Purwaningsih, B.A. Tjipto Sujitno</b> <i>Deposisi Lapisan Tipis ZnO pada Substrat Kaca dengan Teknik DC-Sputtering Sebagai Bahan Sensor Gas Karbon Monoksida (CO)</i>	F-51
<b>Budi Sumanto, Agus Purwanto, dan Sumarna</b> <i>Home Made Elektrokardiogram (EKG)</i>	F-60
<b>Putut Marwoto, Ismiyati, Sugianto, Sulhadi, dan Wiyanto</b> <i>Pengaruh Daya Plasma Pada Sifat Fotoluminisensi Film Tipis Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>:Mn</i>	F-67
<b>Rully Bramasti</b> <i>"Anomali" Resistansi Air yang Diembunkan</i>	F-75
<b>Asnawi dan Mohammad Arief R.</b> <i>Analisis Karakteristik Akustik Laboratorium Pembelajaran FMIPA UNESA Dengan Menerapkan Metode RASTI (Rapid Speech Transmisió n Index)</i>	F-78
<b>Sulhadi dan Putut Marwoto</b> <i>Pengaruh Li<sub>2</sub>O Terhadap Struktur Unit Kaca TeO<sub>2</sub>-ZnO-Li<sub>2</sub>O-Er<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	F-87
<b>Fuad Anwar, Pekik Nurwantoro, Arief Hermanto, dan Prayoto</b> <i>Kajian Awal Simulasi Komputer Pengaruh Efek Tak Isotrop dan Efek Proximitas Terhadap Harga Medan Nukleasi Permukaan Superkonduktor TIPE II</i>	F-93
<b>Khairuddin, Mohammad Ubaidillah, dan Ahmad Marzuki</b> <i>Studi Morfologi dan Kerapatan Pengintian Lapisan Tipis Isotactic Polystyrene (it-PS) dengan Variasi Waktu, Suhu, dan Ketebalan Lapisan</i>	F-104
<b>Dyah Kurniawati Agustika, Agus Purwanto</b>	







## ANALISIS SIMULASI GEJALA CHAOS PADA GERAK PENDULUM NONLINIER

Supardi

Laboratorium Komputasi Fisika, Program Studi Fisika  
Universitas Negeri Yogyakarta

### ABSTRAK

Penelitian tentang gejala chaos pada pendulum nonlinier telah dilakukan. Gejala chaos pada pendulum nonlinier ini terjadi ketika dihadirkan faktor redaman dan gaya pengendali. Mengingat persamaan diferensial gerak pendulum tidak linier, maka peranan metode numerik menjadi sangat penting dalam penyelesaian persamaan diferensial ini.

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier ini adalah metode Runge-Kutta. Pemilihan metode ini mengingat kesederhanaan algoritma dan akurasi yang tinggi.

Hasil penelitian diperoleh bahwa gejala chaos pada pendulum nonlinier teredam dan dikendalikan terjadi ketika gaya pengendali cukup besar dan panjang kayu pengayun (tak bermassa) cukup panjang. Dalam penelitian ini diambil  $F_D = 2$  dan  $l = 10$ . Saat diambil panjang kayu  $l = 2$  dan  $F_D = 2$  ditemukan dua daerah yaitu daerah chaos dan daerah harmonik. Demikian pula, ketika gaya pengendali diambil cukup kecil  $F_D = 0.5$  dan  $l = 10$  maka dua daerah yang ditemukan adalah daerah transien (akibat pengaruh redaman) dan daerah harmonik.

**Kata kunci :** *pendulum, nonlinier, chaos*

### A. Pendahuluan

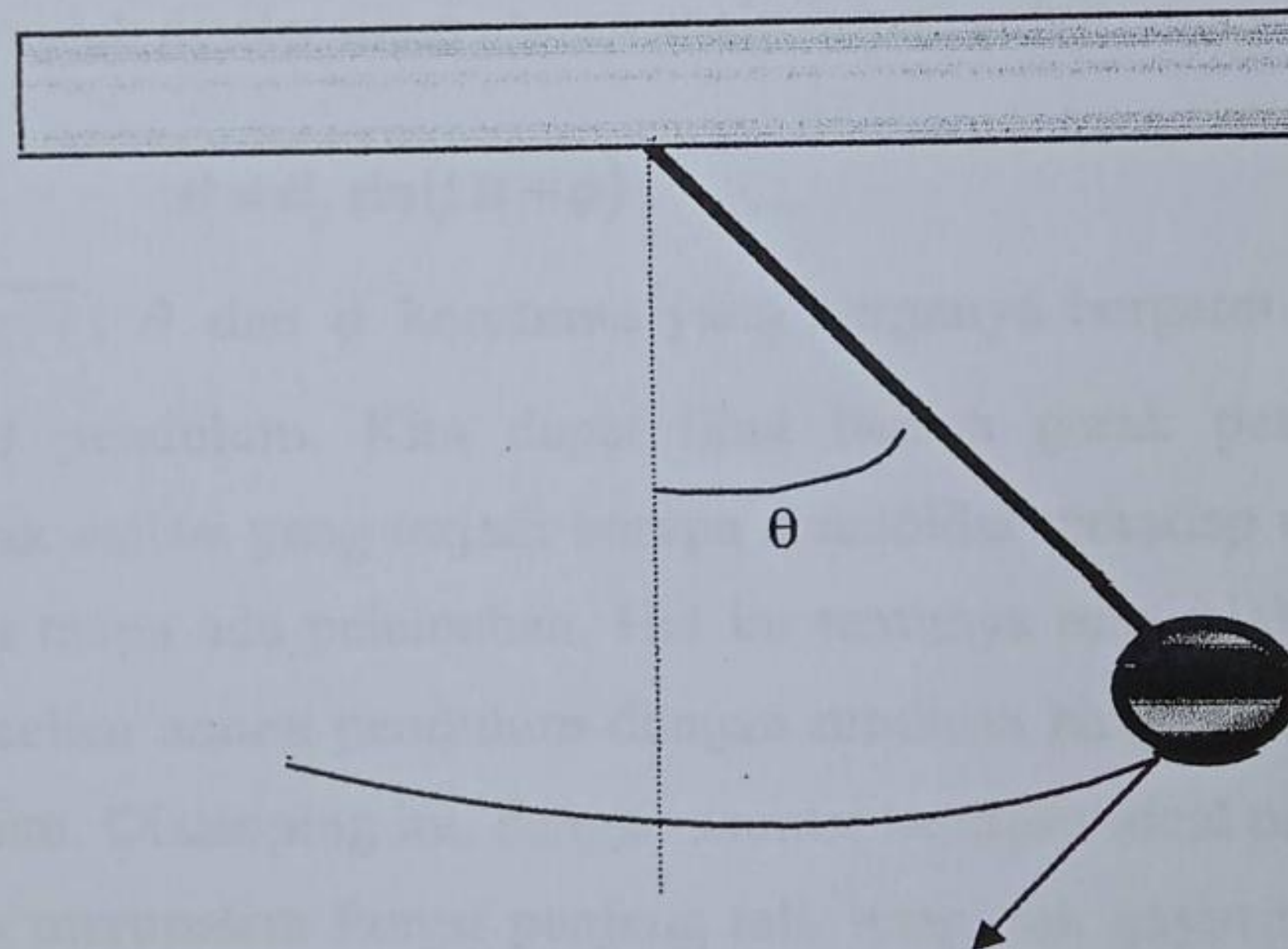
Pendulum merupakan sistem fisis yang didalamnya terkandung gejala fisika yang sangat menarik untuk dikaji. Fenomena gerak osilasi dapat ditemukan di banyak bidang fisika, diantaranya gerak elektron di dalam atom, perilaku arus dan tegangan di dalam rangkaian listrik dan orbit planet. Dari beberapa contoh gerak osilasi tersebut, gerak pendulum merupakan contoh paling sederhana. Pendulum merupakan sistem mekanik yang tersusun atas sebuah massa yang terikat oleh sebuah tali yang dapat berayun bebas sebagai respon terhadap gaya gravitasi. Dalam kasus sederhana, gerakan pendulum mengabaikan kehadiran gaya gesekan dan diasumsikan bahwa sudut simpangan sangat kecil. Gerakan yang dihasilkan dari pendulum dengan kondisi semacam ini berupa gerak harmonik sederhana. Fitur utama dari gerak ini dimiliki pula oleh banyak sistem yang bersolasi.



Akan tetapi, perlakuan level dasar biasanya tidak mempertimbangkan perilaku pendulum sebenarnya (*real pendulum*). Sedangkan *pendulum yang sebenarnya, dia memiliki gesekan dengan medium saat berayun, pengendalian sistem melalui driving force dan dimungkinkan untuk berayun dengan sudut simpangan berapapun*. Fitur inilah yang kemudian mengantarkan kepada perilaku *chaotic*.

Dengan mempertimbangkan pentingnya pengkajian terhadap perilaku chaotic pendulum tersebut, maka penelitian ini akan diarahkan pada pengkajian terhadap gerak pendulum yang meliputi efek gesekan dan kendali (*driving*) pada gerakan. Sebagai gambaran adanya perbedaan yang signifikan antara keadaan ideal dan keadaan riil pada gerak pendulum, maka peneliti juga akan menyajikan gerak pendulum dengan tanpa pengaruh dari luar. Melalui penelitian ini fenomena fisis yang terjadi pada sistem pendulum akan dapat dijelaskan dengan gamblang.

Sebagai gambaran singkat, ditinjau sebuah pendulum yang diikat oleh sebuah tali yang telah diikat pada sebuah langit-langit. Lihat gambar 1.



Gambar 1. Pendulum terikat di ujung kayu tak bermassa

Jika pendulum diayun dengan sudut simpangan kecil kira-kira  $< 1$  radian, maka gerakan yang dihasilkan mendekati gerak harmonik sederhana. Secara matematis, gerak pendulum dapat dinyatakan oleh ungkapan

$$F_{\theta} = -mg \sin(\theta) \quad (1)$$

dengan  $m$  adalah massa pendulum,  $g$  adalah percepatan oleh adanya gravitasi dan  $\theta$  adalah simpangan pendulum (Fowles, 1986).



Hukum Newton kedua menyatakan bahwa gaya merupakan perkalian antara massa benda dengan percepatan partikel yang bergerak sepanjang lintasan berbentuk circular. Jika dinyatakan secara matematis gaya tersebut berbentuk

$$F_{\theta} = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (2)$$

Perpindahan pendulum sepanjang lintasan adalah  $s = l\theta$ , dimana  $l$  adalah panjang tali. Apabila sudut simpangan  $\theta$  dianggap kecil, maka

$$\sin(\theta) \approx \theta \quad (3)$$

sehingga diperoleh ungkapan baru berwujud

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (4)$$

Persamaan ini mudah diselesaikan secara analitik berbentuk

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad (5)$$

dengan  $\Omega = \sqrt{g/l}$ ,  $\theta$  dan  $\phi$  konstanta yang harganya bergantung pada simpangan dan kecepatan awal pendulum. Kita dapat lihat bahwa gerak pendulum ini benar-benar sederhana. Gerak osilasi yang terjadi berupa sinusoidal terhadap waktu dan terus menerus sepanjang masa tanpa ada pelemahan. Hal ini tentunya menyalahi keadaan riil yang ada, dimana ada gesekan antara pendulum dengan medium hingga osilasi akan berhenti pada suatu saat tertentu. Disamping itu, dengan asumsi keadaan ideal osilasi memiliki kecepatan anguler  $\omega$  yang merupakan fungsi panjang tali, tetapi tak gayut tak gayut terhadap massa pendulum. Artinya, gerak osilasi ini mengabaikan besar kecilnya massa pendulum. Tentu saja, hal ini menjadi tanda tanya besar kepada peneliti.

Dari uraian di atas peneliti merencanakan riset mengenai keadaan chaos yang terjadi pada gerak pendulum dengan mempertimbangkan gesekan yang terjadi baik yang tidak dikendalikan (*undriven*) maupun yang dikendalikan (*driven*). Apabila dalam keadaan ideal sudut simpangan harus diambil sangat kecil kira-kira  $< 1$  radian, maka dengan pendekatan riil sudut berapapun dapat diambil. Oleh sebab itu, penelitian ini sangat penting untuk dilakukan guna mengetahui perilaku gerak pendulum yang sebenarnya.



## B. Perumusan Masalah

Bersarkan pada uraian pendahuluan di atas, maka dapat dirumuskan beberapa permasalahan, antara lain

1. Sampai saat ini, pengkajian teoritis terhadap gerak pendulum masih pada tataran ideal sehingga belum menyentuh pada keadaan riil gerak pendulum tersebut.
2. Bagaimana memecahkan permasalahan gerak pendulum nonlinier teredam dan dikendalikan (*fenomena chaos*) melalui pendekatan komputasi numerik.

## C. Tinjauan Pustaka

### CI. Pendulum Linier Teredam

Di bagian pendahuluan di atas, kita sudah sedikit menyinggung tentang gerak pendulum linier tak teredam. Pendekatan telah kita ambil untuk simpangan yang kecil, sehingga ungkapan  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Dari ungkapan persamaan diferensial yang ada diperoleh penyelesaian berbentuk grafik sinusoidal. Grafik sinusoidal yang diperoleh tidak pernah mengalami peredaman atau dengan kata lain pendulum akan berayun sepanjang masa. Hal ini tentunya menyalahi kenyataan yang ada. Lihat gambar 2.

Pengaruh kedua untuk menentukan gerak pendulum linier adalah efek redaman. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menggambarkan efek gesekan ini adalah dengan memandang sebuah torca yang berbanding lurus dengan kecepatan anguler pendulum.

$$\tau_f = -c\omega \quad (6)$$

dengan  $c$  adalah konstanta positif. Dengan demikian total torca yang bekerja pada pendulum adalah

$$\tau = \tau_f + \tau_g = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7)$$

Dengan memberikan harga kepada simpangan awal  $\theta_0$ , kecepatan anguler awal  $\omega_0$  dan  $c$  tertentu, maka akan dapat diperoleh grafik simpangan versus  $t$  dan kecepatan anguler versus  $t$ . Lihat gambar 3.



## B. Perumusan Masalah

Bersarkan pada uraian pendahuluan di atas, maka dapat dirumuskan beberapa permasalahan, antara lain

1. Sampai saat ini, pengkajian teoritis terhadap gerak pendulum masih pada tataran ideal sehingga belum menyentuh pada keadaan riil gerak pendulum tersebut.
2. Bagaimana memecahkan permasalahan gerak pendulum nonlinier teredam dan dikendalikan (*fenomena chaos*) melalui pendekatan komputasi numerik.

## C. Tinjauan Pustaka

### CI. Pendulum Linier Teredam

Di bagian pendahuluan di atas, kita sudah sedikit menyinggung tentang gerak pendulum linier tak teredam. Pendekatan telah kita ambil untuk simpangan yang kecil, sehingga ungkapan  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Dari ungkapan persamaan diferensial yang ada diperoleh penyelesaian berbentuk grafik sinusoidal. Grafik sinusoidal yang diperoleh tidak pernah mengalami peredaman atau dengan kata lain pendulum akan berayun sepanjang masa. Hal ini tentunya menyalahi kenyataan yang ada. Lihat gambar 2.

Pengaruh kedua untuk menentukan gerak pendulum linier adalah efek redaman. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menggambarkan efek gesekan ini adalah dengan memandang sebuah torka yang berbanding lurus dengan kecepatan anguler pendulum.

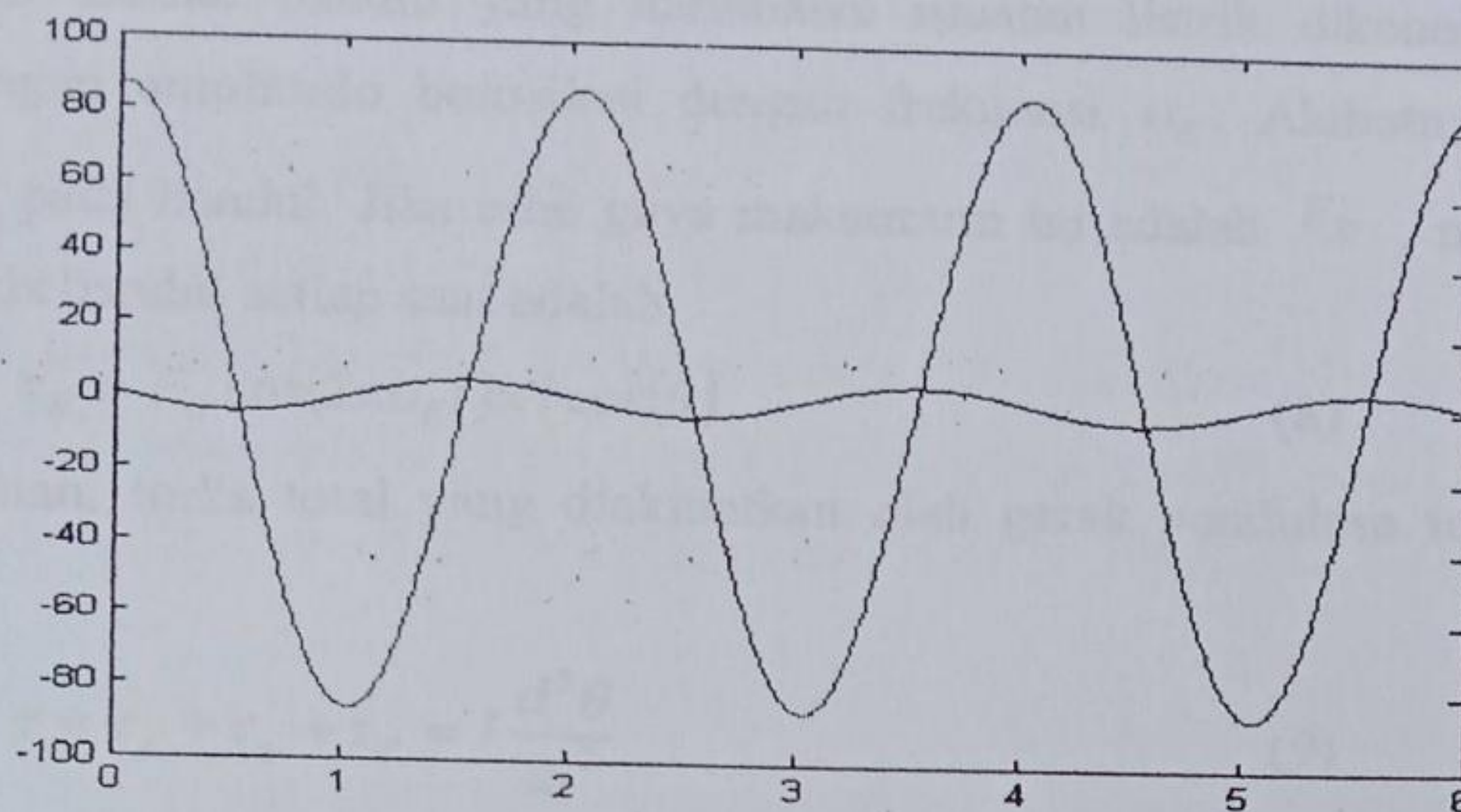
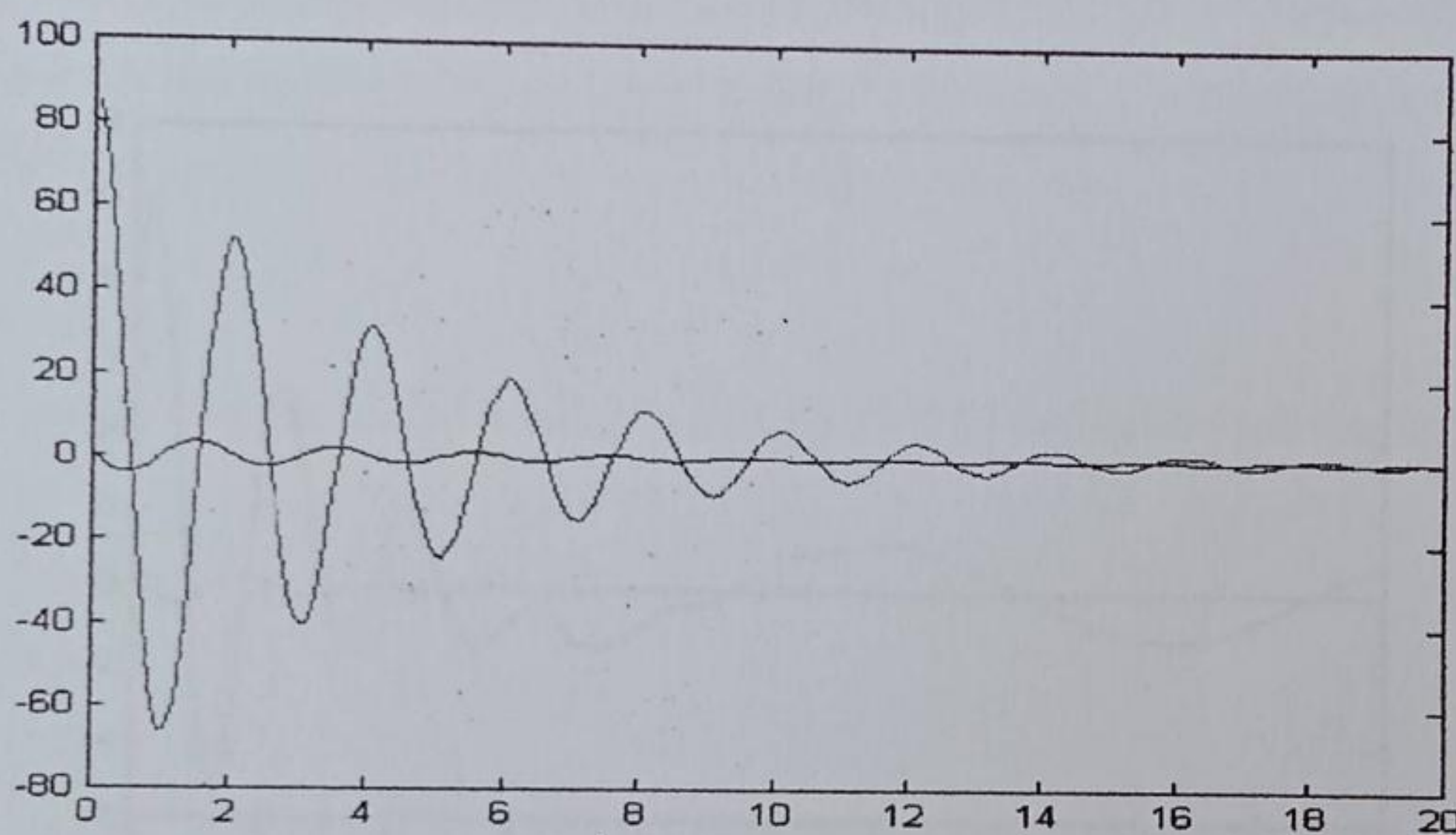
$$\tau_f = -c\omega \quad (6)$$

dengan  $c$  adalah konstanta positif. Dengan demikian total torka yang bekerja pada pendulum adalah

$$\tau = \tau_f + \tau_g = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7)$$

Dengan memberikan harga kepada simpangan awal  $\theta_0$ , kecepatan anguler awal  $\omega_0$  dan  $c$  tertentu, maka akan dapat diperoleh grafik simpangan versus  $t$  dan kecepatan anguler versus  $t$ . Lihat gambar 3.



Gambar 2. Plot grafik untuk gerak pendulum dengan  $\theta \ll 1$  radianGambar 3. Plot grafik untuk gerak pendulum dengan  $\theta \ll 1$  radian dan mempertimbangkan gaya gesekan

## C2. Gerak Pendulum Terpaksa Teredam

Apabila kita memandang sebuah jam dinding di rumah kita, dimana terdapat sebuah bandul yang menggantung di bagian bawah jam dan bergerak terus menerus tanpa henti. Sementara itu, waktu yang dibutuhkan untuk berayun dari detik satu ke detik berikutnya adalah sama. Sebenarnya, sistem yang ada di dalam jam tersebut merupakan contoh dari gerak pendulum terpaksa teredam. Prinsip yang diterapkan dalam sistem ini berupa penguasaan torka yang bersifat periodik. Hal yang dapat dilakukan adalah dengan memberikan muatan kepada bandul tersebut dan mengenakan medan listrik yang berosilasi.



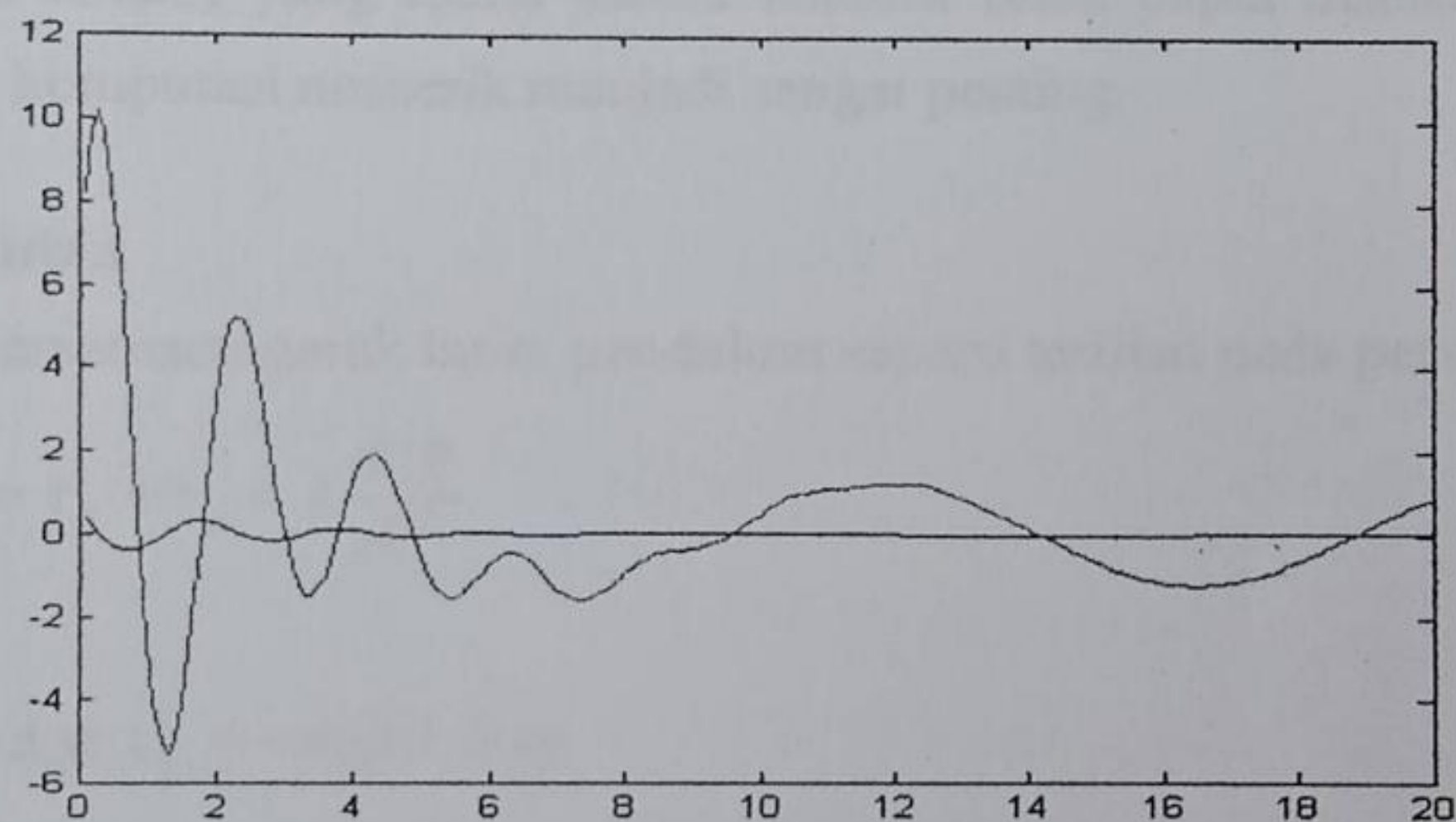
Ditinjau sebuah bandul yang membawa muatan listrik dikenai medan listrik horizontal dengan amplitudo berosilasi dengan frekuensi  $\nu_E$ . Akibatnya, akan terjadi fluktuasi gaya pada bandul. Jika nilai gaya maksimum ini adalah  $F_E$ , maka torka yang dikerahkan pada bandul setiap saat adalah

$$\tau_E = F_E \cos(2\pi\nu_E t) \times l \cos(\theta) \quad (8)$$

Dengan demikian, torka total yang diakibatkan oleh gerak pendulum terpaksa teredam adalah

$$\tau = \tau_f + \tau_g + \tau_E = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9)$$

Sebagai gambaran gerak pendulum ini dapat dilihat pada gambar 4.



Gambar 4. Plot grafik untuk gerak pendulum terpaksa teredam dengan  $\theta \ll 1$  radian

### C3. Gerak Pendulum Non-Linier

#### C. 3.1 Gerak Non-Linier Tak Dikendalikan

Gerak pendulum yang sudah dibicarakan di atas masih dengan asumsi bahwa  $\sin(\theta) \approx \theta$  yang memberikan hasil yang secara kualitatif benar. Tetapi, sekarang bagaimana jika sudut simpangan pada pendulum sembarang atau tidak dibatasi dengan asumsi di atas. Oleh karena sudut simpangan sembarang, maka gerak pendulum tidak linier lagi. Dengan kata lain, gerak yang akan dihasilkan menjadi tidak harmonik lagi.

Beberapa kasus dalam daerah ini mungkin masih dapat diperlakukan secara analitik, tetapi sebagian besar tidak dapat diselesaikan secara matematis. Oleh sebab itu,



kehadiran komputasi numerik sangat diperlukan untuk memahami perilaku sistem yang sebenarnya.

### C. 3.2 Gerak Non-Linier Dikendalikan

Setelah gerak non linier tak dikendalikan, masalah yang muncul kemudian adalah bagaimana jika gerak pendulum non linier tersebut dikendalikan melalui pengaruh luar. Dengan kehadiran pengaruh luar yang diberikan kepada sistem akan membuat sistem menjadi *unpredictable*. Hal ini akan menjadi lebih menarik untuk dibahas dan diselesaikan.

### D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan pada rumusan permasalahan di atas serta tinjauan pustaka yang dilakukan oleh peneliti, maka tujuan dari penelitian ini adalah

- Menyelesaikan permasalahan gerak pendulum nonlinier teredam dan dikendalikan (fenomena *chaos*) yang mana secara analitik tidak dapat diselesaikan, sehingga kehadiran komputasi numerik menjadi sangat penting.

### E. Metode Penelitian

Ditinjau persamaan gerak linier pendulum seperti terlihat pada persamaan (7)

$$\tau = \tau_f + \tau_g = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

dimana

$$\tau_f = -c\omega \text{ dan } \tau_g = -mgl\theta \text{ atau}$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\theta - c \frac{d\theta}{dt} \quad (10)$$

Persamaan (10) menggunakan pendekatan bahwa  $\sin(\theta) \approx \theta$ , sehingga masih mudah untuk diselesaikan secara analitik. Pendekatan ini betul untuk simpangan  $\theta$  yang kecil. Jika tidak dilakukan pendekatan untuk  $\sin(\theta)$ , maka persamaan (10) menjadi

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} + mgl \sin(\theta) = 0 \quad (11)$$

Dengan mensubstitusikan  $I = mL^2$  pada persamaan (11), maka ungkapan ini selanjutnya menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (12)$$



dengan  $q$  merupakan ungkapan baru untuk konstanta  $c$  (Oldfield, 2006). Untuk gerak pendulum nonlinier dikendalikan teredam, persamaan (12) masih diberikan pengaruh luar yang mendrive gerakan. Dimisalkan gaya yang mendrive gerak pendulum adalah

$$F = F_D \sin(\omega_D t) \quad (13)$$

maka persamaan (12) menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + q \frac{d\theta}{dt} + mg \sin(\theta) - F_D \sin(\Omega_D t) = 0 \quad (14)$$

#### Metode Runge Kutta Orde 4 (RK4)

Metode RK4 merupakan metode yang sangat handal untuk penyelesaian persamaan diferensial (Koonin, 1990). Jika kita lihat pada persamaan (14), persamaan ini termasuk persamaan diferensial orde 2. oleh sebab itu perlu dibuat menjadi persamaan diferensial orde satu. Dengan demikian dimisalkan

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (15)$$

Sehingga persamaan (13) menjadi

$$\frac{d\omega}{dt} + c\omega + mg \sin(\theta) - F_D \sin(\Omega_D t) = 0 \quad (16)$$

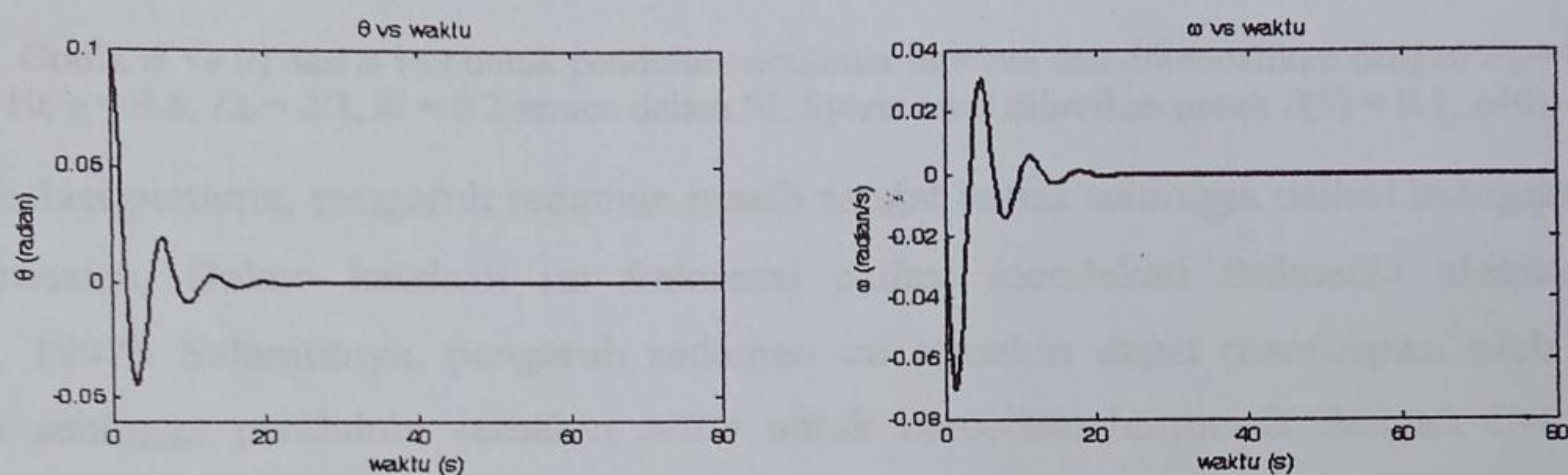
Dengan memberikan syarat awal pada persamaan (15)  $\theta_0$  dan persamaan (16)  $\omega_0$ , maka akan diperoleh kecepatan anguler dan simpangan pada setiap saat. Dibawah ini bentuk metode RK4 yang akan diterapkan dalam penelitian ini

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, \theta, \omega) \\ l_1 &= g(t, \theta, \omega) \\ k_2 &= f\left(t + \frac{1}{2}h, \theta + \frac{1}{2}k_1, \omega + \frac{1}{2}l_1\right) \\ l_2 &= g\left(t + \frac{1}{2}h, \theta + \frac{1}{2}k_1, \omega + \frac{1}{2}l_1\right) \\ k_3 &= f\left(t + \frac{1}{2}h, \theta + \frac{1}{2}k_2, \omega + \frac{1}{2}l_2\right) \\ l_3 &= g\left(t + \frac{1}{2}h, \theta + \frac{1}{2}k_2, \omega + \frac{1}{2}l_2\right) \\ k_4 &= f(t + h, \theta + k_3, \omega + l_3) \\ l_4 &= g(t + h, \theta + k_3, \omega + l_3) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \omega_{n+1} &= \omega_n + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{aligned} \quad (16)$$



## HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil pendekatan numerik terhadap gejala chaos yang terjadi pada pendulum nonlinier dengan pengaruh redaman dan gaya pengendali diperoleh beberapa grafik. Pada penelitian ini diambil beberapa asumsi untuk parameter  $l$  (panjang tali),  $g$  (percepatan gravitasi),  $\omega_D$  (kecepatan anguler gaya pengendali),  $F_D$  (gaya gaya pengendali),  $q$  (konstanta redaman). Secara lengkap grafik hasil komputasi numerik adalah sebagai berikut

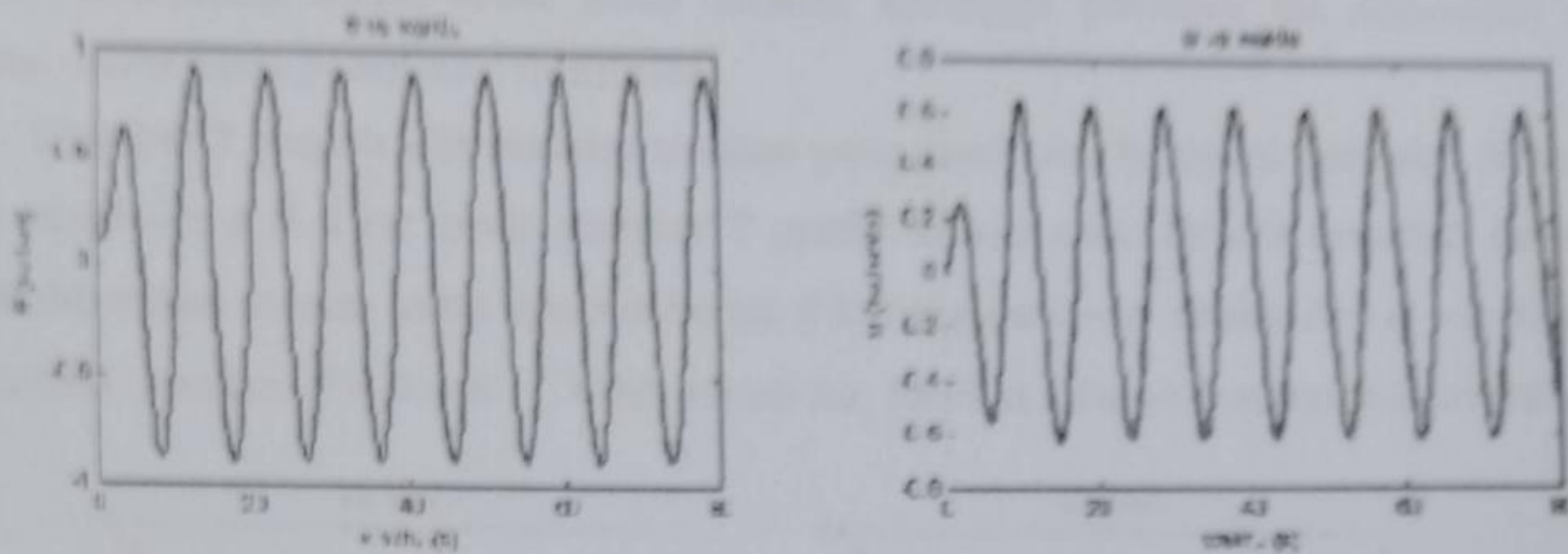


Gambar 5. Perilaku  $\theta$  terhadap waktu ( $t$ ) dan kecepatan anguler  $\omega$  vs  $t$  untuk pendulum nonlinier teredam dan dikendalikan dengan  $F_D=0$ ,  $q=0,5$ ,  $l=10$ ,  $g=9.8$ ,  $\Omega_D=2/3$ ,  $dt=0.2$  semua dalam SI. Syarat awal diberikan untuk  $\theta(0)=0.1$ ,  $\omega(0)=0$

Gambar 5 ditunjukkan grafik perilaku simpangan  $\theta$  pada setiap saat ( $t$ ) untuk gaya pengendali  $F_D=0$ . Dengan kondisi ini artinya bahwa gaya pengendali tidak berpengaruh sama sekali terhadap gerak pendulum. Oleh sebab itu, gerak pendulum akan teredam dengan frekuensi osilasi dekat dengan frekuensi alamiah osilasi tak teredam. Kecepatan anguler  $\omega$  untuk kondisi ini tidak jauh berbeda dengan kondisi pada  $\theta$ , yakni bahwa  $\omega$  semakin menghilang seiring dengan bertambahnya waktu.

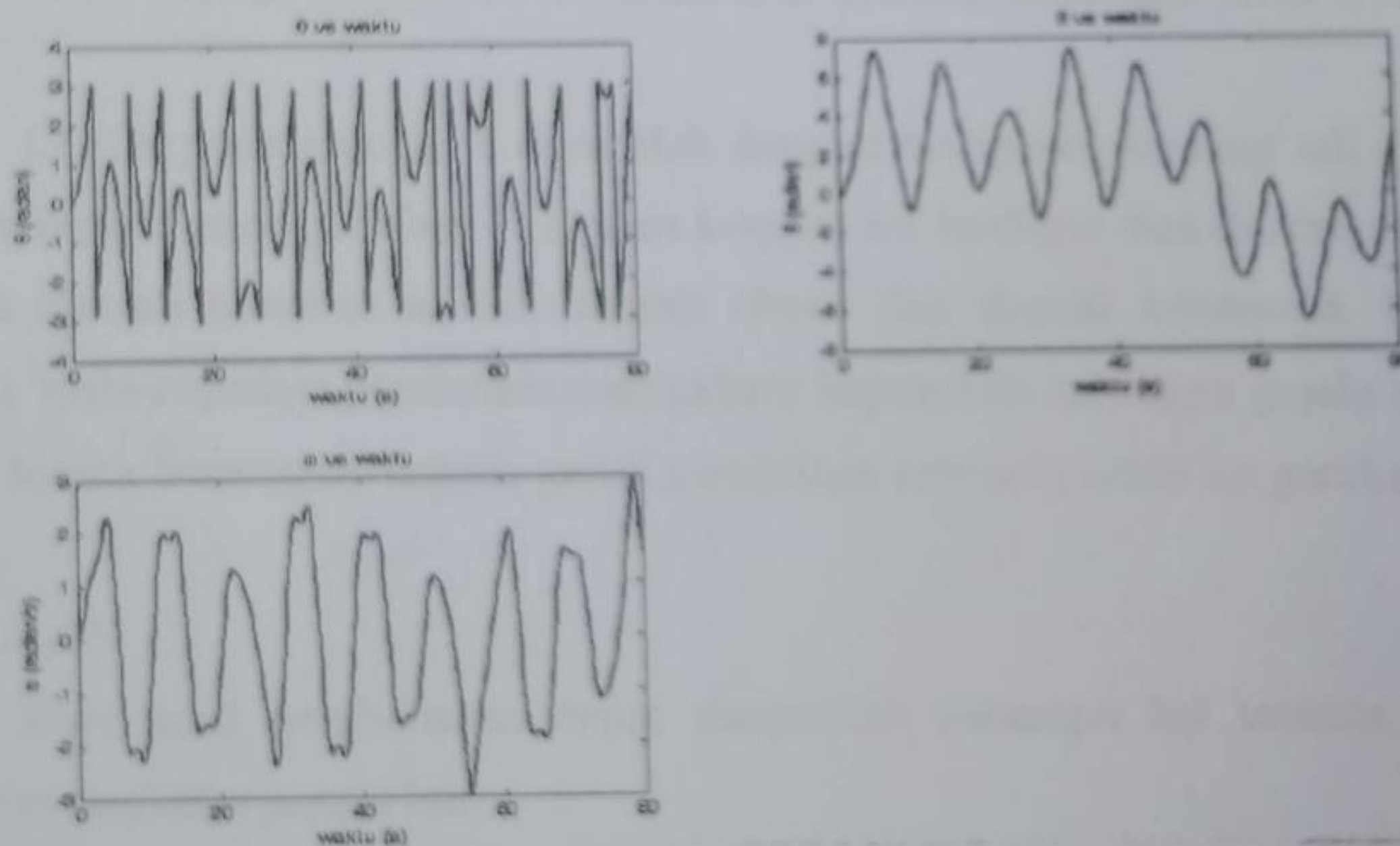
Untuk pemilihan gaya pengendali kecil, grafiknya ditunjukkan pada gambar 6. Besarnya gaya pengendali untuk penelitian ini adalah 0.5. Seperti terlihat pada gambar, dengan pengenaan gaya pengendali yang kecil, maka terdapat dua daerah osilasi.





Gambar 6. Grafik  $\theta$  vs  $t$  dan  $\omega$  vs  $t$  untuk pendulum nonlinier teredam dan dikendalikan dengan  $F_D = 0.5$ ,  $q = 0.5$ ,  $l = 10$ ,  $g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = 0.2$  semua dalam SI. Syarat awal diberikan untuk  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\omega(0) = 0$ .

Osilasi pertama, pengaruh redaman masih sangat terasa sehingga osilasi mengarah ke keadaan transien. Dalam keadaan ini frekuensi osilasi mendekati frekuensi alamiah  $\Omega$  (Giordano, 1997). Selanjutnya, pengaruh redaman ini semakin dapat diantisipasi oleh gaya pengendali sehingga pendulum semakin *settle* untuk berosilasi harmonik dengan frekuensi pengendali  $\Omega_D$ .



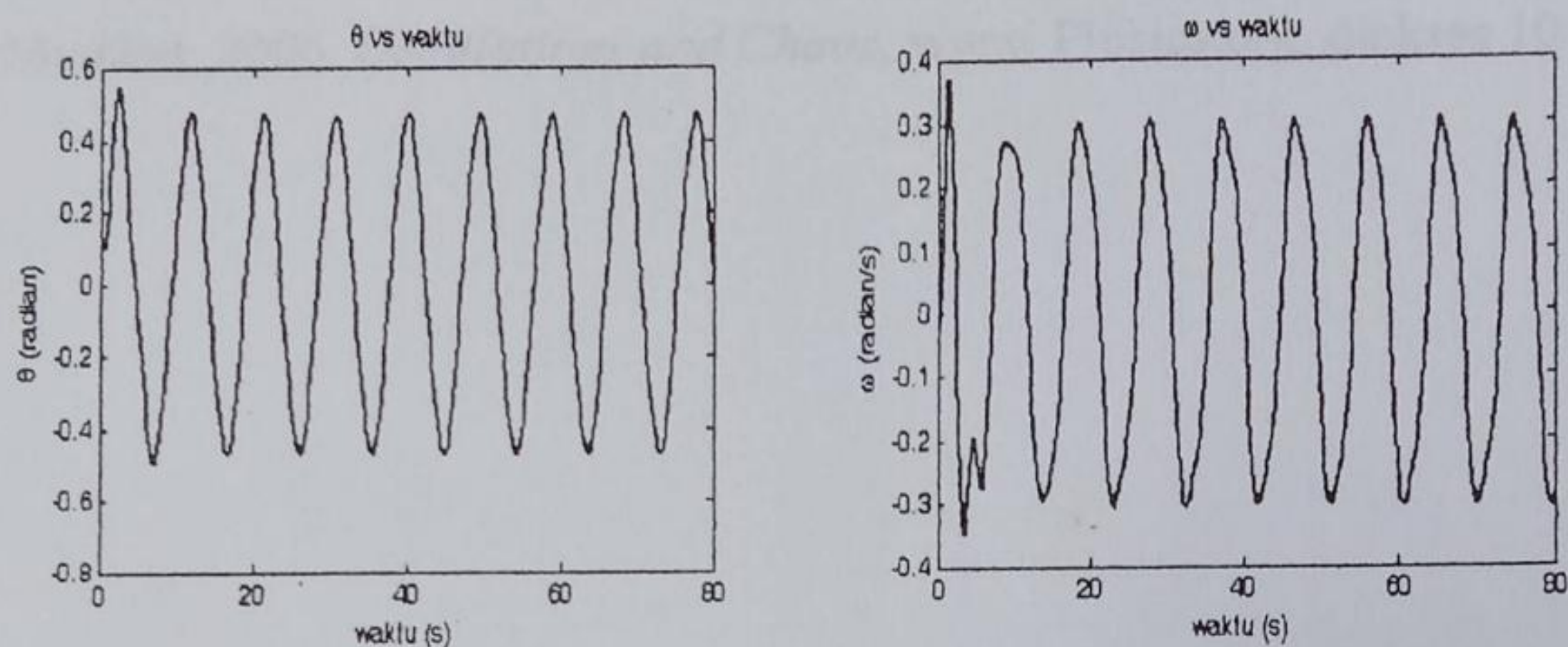
Gambar 7. Grafik  $\theta$  vs  $t$  dan  $\omega$  vs  $t$  untuk pendulum nonlinier teredam dan dikendalikan dengan  $F_D = 2$ ,  $q = 0.5$ ,  $l = 10$ ,  $g = 9.8$ ,  $\Omega_D = 2/3$ ,  $dt = 0.2$  semua dalam SI. Syarat awal diberikan untuk  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\omega(0) = 0$ .

Perubahan yang sangat radikal terjadi saat gaya pengendali yang dikenakan cukup besar. Dalam penelitian ini gaya pengendali yang dikenakan adalah  $F_D = 2$ . Seperti terlihat pada gambar bahwa gerak pendulum tidak lagi sederhana. Gerakan pendulum tidak pernah *settle* pada gerak harmonik hingga akhir waktu yang diberikan.



Gerakan pendulum benar-benar tidak teratur, sehingga perilaku ini dikatakan sebagai perilaku *chaos* pada pendulum nonlinier.

Gambar 7 bagian kiri atas merupakan penggambaran kembali perilaku  $\theta$  terhadap  $t$  dalam ranah  $-\pi \leq \theta \leq +\pi$  pada gambar 7 grafik kanan atas. Grafik tersebut ditampilkan setelah diberikan syarat, yaitu apabila harga  $\theta$  kurang dari  $-\pi$  maka  $\theta = \theta + \pi$  dan apabila  $\theta$  melebihi  $\pi$  maka  $\theta = \theta - \pi$ . Oleh sebab itu, terlihat adanya lompatan-lompatan grafik.



Gambar 8. Grafik  $\theta$  vs ( $t$ ) dan  $\omega$  vs  $t$  untuk pendulum nonlinier teredam dan dikendalikan dengan  $F_D = 2$ ,  $q = 0.5$ ,  $l = 2$ ,  $g = 9.8$ ,  $\Omega = 2/3$ ,  $dt = 0.2$  semua dalam SI. Syarat awal diberikan untuk  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\omega(0) = 0$ .

Grafik pada gambar 8 diperoleh dengan mengeset panjang tali  $l = 2$  dan parameter lainnya seperti pada gambar 7. Dalam kondisi ini terdapat dua daerah seperti pada gambar 6. Dua daerah tersebut adalah daerah *chaos* dan daerah *harmonik*. Pada awal gerakan ayunan, rupa-rupanya pendulum mengalami kepanikan sehingga gejala chaos terjadi. Akan tetapi, secara berangsur-angsur gerak pendulum semakin *settle* ke gerakan yang harmonik.

## SIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan beberapa hal tentang gejala chaos pada pendulum nonlinier antara lain:

1. Gejala chaos pada pendulum nonlinier dapat terjadi disebabkan oleh dua hal panjang kayu pengayun dan besarnya *driving force* yang bekerja pada pendulum.
2. Gejala chaos terjadi dengan mengatur beberapa parameter antara lain panjang kayu 10 meter, besar *driving force* 2 Newton, koefisien gesekan  $q = 1$ , percepatan gravitasi  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  simpangan awal mulai  $\theta_0 = 0.1 \text{ radian}$ , kecepatan sudut awal dan frekuensi *driving force*  $f_d = 0.60$



**DAFTAR PUSTAKA**

Fowles, 1986. *Analytical Mechanics 4<sup>th</sup> edition*, New York: CBS College Publishing.

Giordano, Nicholas J., 1997. *Computational Physics*, New Jersey : Prentice Hall

Koonin & Meredith, 1990. *Computational Physics*, Canada : Addison-Wesley Publishing Company Inc.

Oldfield, Michael, 2006. *Oscillations and Chaos*, [www. Physics.org](http://www.Physics.org), diakses 10 Februari 2008